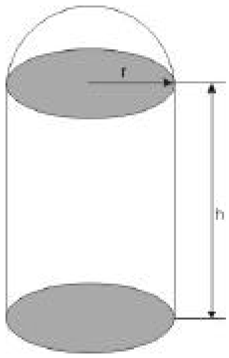
# Beispiel)

Gegeben ist eine Getränkedose mit einer aufgesetzten Halbkugel, das Volumen dieses Objektes ist 0,5 Liter.

a) Wie sind die Abmessungen r und h des Objekts zu wählen, damit der Materialverbrauch minimal ist.

b) Wie viel Material ist für eine handelsübliche zylindrische 0,5 Liter Dose mit H=1,5dm nötig. Wie viel Prozent lassen sich durch die oben genannte Form einsparen?

<u>Skizze:</u>




ad a)

Die Oberfläche soll minimal werden.

<u>Hauptbedingung:</u>

O = Grundfläche des Zylinders + Mantel des Zylinders + Oberfläche der Halbkugel

$$O ? r^2? ? 2r?h ? 2r^2?$$

$$O ? 3r^2? ? 2r?h$$

<u>Nebenbedingung</u> mit Berechnung der Hohe h

$$V_{ges} ? V_{DZ} ? V_{HK}$$

$$V_{ges} ? r^2?h ? \frac{2r^3?}{3}$$

$$0,5 ? r^2?h ? \frac{2r^3?}{3} \,|\, ? \frac{2r^3?}{3}$$

$$0,5 ? \frac{2r^3?}{3} ? r^2?h \,|: r^2?$$

$$\frac{0,5 ? \frac{2r^3?}{3}}{r^2?} ? h$$

$$h ? \frac{0,5 ? \frac{2}{3} r^3?}{r^2?}$$

Einsetzen der Nebenbedingung in die Hauptbedingung:

$$O = 3r^2\pi + 2r\pi h,$$

$$O(r) = 3r^2\pi + 2\cancel{r}\cancel{\pi}\left(\frac{0{,}5 - \frac{2}{3}r^3\pi}{r^{\cancel{2}}\cancel{\pi}}\right)$$

$$O(r) = 3r^2\pi + 2\left(\frac{1 - \frac{4}{3}r^3\pi}{r}\right)$$

$$O'(r) = 6r\pi + 2\left(\frac{\left(-\frac{12}{3}r^2\pi\right)r - 1\left(1 - \frac{4}{3}r^3\pi\right)}{r^2}\right)$$

$$O'(r) = 6r\pi + 2\left(\frac{-4r^3\pi - 1 + \frac{4}{3}r^3\pi}{r^2}\right)$$

$$O'(r) = 0:$$

$$6r\pi + 2\left(\frac{-4r^3\pi - 1 + \frac{4}{3}r^3\pi}{r^2}\right) = 0 \mid \cdot r^2$$

$$6r^3\pi - 4r^3\pi - 1 + \frac{4}{3}r^3\pi = 0$$

$$\frac{10}{3}r^3\pi = 1 \mid \cdot 3$$

$$10r^3\pi = 3 \mid :10\pi$$

$$r^3 = \frac{3}{10\pi} \mid \sqrt[3]{\phantom{x}}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3}{10\pi}} = 0{,}457dm$$

$$h = \frac{0{,}5 - \frac{2}{3}(0{,}45707849)^3\pi}{0{,}45707849^2\pi} = 0{,}457dm$$

<u>Berechnung der Oberfläche:</u>

$$O = 3r^2\pi + 2r\pi h$$

$$O = 3(0{,}45707849)^2\pi + 2(0{,}45707849)\pi(0{,}45707077)$$

$$\underline{\underline{O = 3{,}28dm^2}}$$

$$\underline{O = 328cm^2}$$

ad b)
V=0,5 Liter=0,5dm³=500cm³
h=1,5dm=15cm

$$V = r^2\pi h$$

$$500 = r^2\pi 15 \mid :15\pi$$

$$r^2 = \frac{500}{15\pi} \mid \sqrt{\phantom{x}}$$

$$r = \sqrt{\frac{100}{3\pi}}$$

$$r = 3{,}26cm$$

<u>Berechnung der Oberfläche:</u>

$$O = 2r^2\pi + 2r\pi h$$

$$O = 2\left(\sqrt{\frac{100}{3\pi}}\right)^2\pi + 2\sqrt{\frac{100}{3\pi}}15\pi$$

$$O = 373{,}66cm^2$$

<u>Prozentunterschied der beiden Oberflächen:</u>

373,7............100%
3,73..................1%
<u>328,2...................x</u>

$$x = \frac{328{,}2}{3{,}737} = 87{,}8\%$$

$$100 - 87{,}8 = 12{,}2\%$$

Der Unterschied beträgt ca.12%.