Beispiel)

Eine Kurve $k_1: y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ hat im Punkt $P(-\frac{3}{2} | y_p)$ die Steigung $-\frac{5}{4}$ und im Wendepunkt $W(0|\frac{2}{3})$ die Steigung 1.

Eine zweite Kurve $k_2: y = px^2 + qx + r$ geht durch den Punkt P und hat in W einen Extremwert.

a) Ermittle die Gleichungen der beiden Kurven

b) Zeichne die Graphen der beiden Funktionen im Intervall [-2,5;2,5]

c) Berechne die Flächeninhalte der von beiden Funktionsgraphen begrenzten endlichen Flächenstücke.

ad a)

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad P(-\frac{3}{2}|y_p) \qquad k_p = -\frac{5}{4}$$
$$y' = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$y'' = 6ax + 2b \qquad W(0|\frac{2}{3}) \qquad k_w = 1$$

Aufstellen der Funktion für die erste Kurve:

$$f(0) = \frac{2}{3}: \qquad d = \frac{2}{3}$$
$$f''(0) = 0: \qquad 2b = 0 \to b = 0$$
$$f'(0) = 1: \qquad c = 1$$
$$f'\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{5}{4}: \qquad 3a \cdot \frac{9}{4} + 1 = -\frac{5}{4} \to a = -\frac{1}{3}$$

Die 1.Funktion lautet:

$$\underline{\underline{y_1 = -\frac{1}{3}x^3 + x + \frac{2}{3}}}$$

Aufstellen der Funktion für die zweite Kurve:

$$E(0|\frac{2}{3})$$
$$y = px^2 + qx + r$$
$$y' = 2px + q$$
$$f(-\frac{3}{2}) = \frac{9}{8} - \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{24} \to P(-\frac{3}{2}|\frac{7}{24})$$

Die 2.Funktion lautet:

$f'(0)=0: \quad \underline{q=0}$

$f(0)=\frac{2}{3}: \quad \underline{r=\frac{2}{3}}$

$f(-\frac{3}{2})=\frac{27}{4}: \frac{27}{4}=\frac{9}{4}p+\frac{2}{3}$

$\frac{7}{24}=\frac{9}{4}p+\frac{2}{3} \quad |\cdot 24$

$7=54p+16 \quad |-16$

$-9=54p \quad |:54$

$\underline{p}=-\frac{9}{54}=\underline{-\frac{1}{6}}$

$$\underline{\underline{y_2=-\frac{1}{6}x^2+\frac{2}{3}}}$$

Berchnung der Schnittpunkte:

$-\frac{1}{3}x^3+x+\cancel{\frac{2}{3}}=-\frac{1}{6}x^2+\cancel{\frac{2}{3}} \quad |+\frac{1}{6}x^2$

$-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{6}x^2+x=0 \quad |\cdot(-6)$

$2x^3-x^2-6x=0$

$x\cdot(2x^2-x-6)=0$

$\underline{\underline{x_1=0}}$

$2x^2-x-6=0 \quad |:2$

$x^2-0,5x-3=0$

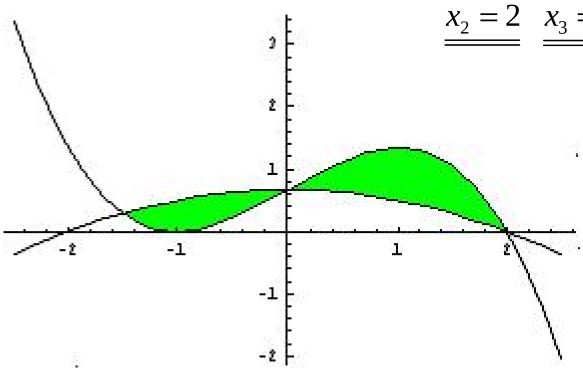
${}_1x_2=0,25\pm\sqrt{0,25^2+3}$

${}_1x_2=0,25\pm1,75$

$\underline{\underline{x_2=2}} \quad \underline{\underline{x_3=-1,5}}$

ad b)

Skizze der Funktionen:



ad c)

Berechnung der Flächeninhalte (achte auf die Aufteilung):

$$A_1=\int_{-1,5}^{0}\left[\left(-\frac{1}{6}x^2+\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{1}{3}x^3+x+\frac{2}{3}\right)\right]dx=\int_{-1,5}^{0}\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^2-x\right)dx=$$

$$\left.\frac{x^4}{12}-\frac{x^3}{18}-\frac{x^2}{2}\right|_{-1,5}^{0}=-(0,422+0,188-1,125)=\underline{\underline{0,515E^2}}$$

$$A_2=\int_{0}^{2}\left[\left(-\frac{1}{3}x^3+x+\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{1}{6}x^2+\frac{2}{3}\right)\right]dx=\int_{0}^{2}\left(-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{6}x^2+x\right)dx=$$

$$\left.-\frac{x^4}{12}+\frac{x^3}{18}+\frac{x^2}{2}\right|_{0}^{2}=-1,333+0,444+2=\underline{\underline{1,111E^2}}$$

$$A_{ges}=A_1+A_2=0,515+1,111=\underline{\underline{1,6262E^2}}$$