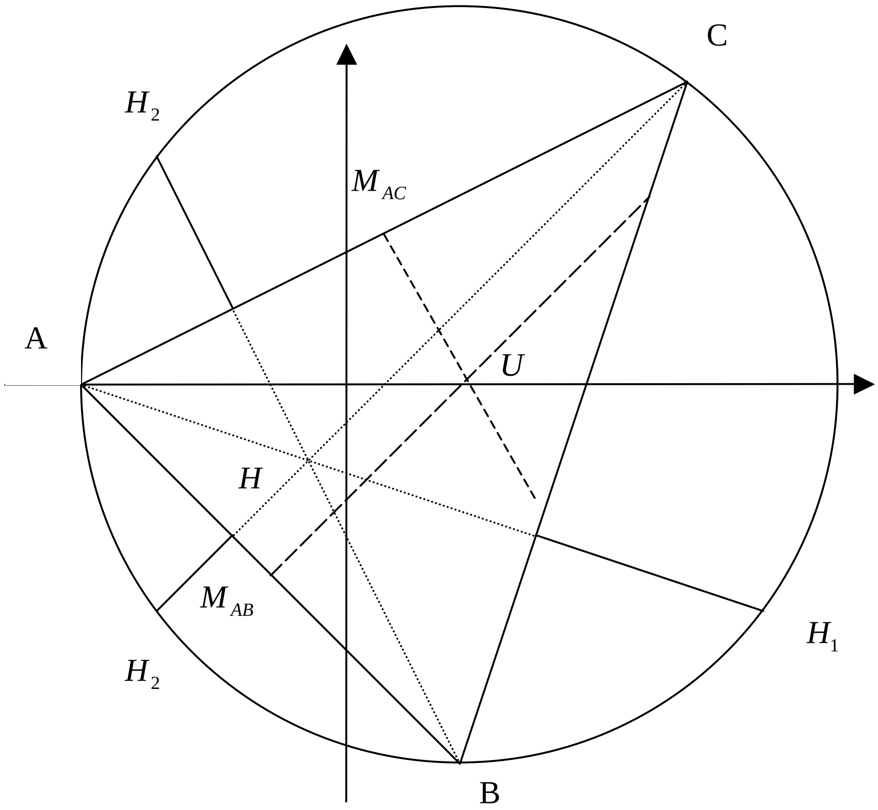
Beispiel)

Das Dreieck A(-7|0), B(3|-10) und C(9|8) ist gegeben. Spiegelt man den Höhenschnittpunkt an den Dreiecksseiten, so liegen die drei gespiegelten Punkte auf dem Umkreis des Dreiecks. Zeige die Gültigkeit dieses Satzes am Dreieck ABC!

Skizze:



Berechnung der Vektoren und der Mittelpunkte:

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}10\\-10\end{pmatrix}\overset{10}{=}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AB_n}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \qquad M_{AB}=\frac{1}{2}\cdot\left[\begin{pmatrix}-7\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-10\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-4\\-10\end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{M_{AB}(-2|-5)}}$$

$$\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}16\\8\end{pmatrix}\overset{8}{=}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC_n}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} \qquad M_{AC}=\frac{1}{2}\cdot\left[\begin{pmatrix}-7\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}9\\8\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{M_{AC}(1|4)}}$$

$$\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}6\\18\end{pmatrix}\overset{6}{=}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BC_n}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$$

Aufstellen von h_c:

$$x-y=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9\\8\end{pmatrix}$$

$$h_c:\ \underline{x-y=1}$$

Aufstellen von h_b:

$$2x+y=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-10\end{pmatrix}$$

$$h_b:\ 2x+y=-4$$

Berechnung des Höhenschnittpunktes:

$$h_c \cap h_b = \{H\}$$

$$\left.\begin{aligned} x - y &= 1 \\ 2x + y &= -4 \end{aligned}\right\} +$$

$$3x = -3 \qquad |:3$$

$$\underline{\underline{x = -1}}$$

$$y = -4 - 2x$$

$$y = -4 + 2$$

$$\underline{\underline{y = -2}} \qquad \underline{\underline{H(-1|-2)}}$$

$$S_{AB}: \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$S_{AC}: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Berechnen des Umkreismittelpunktes:

$$S_{AB} \cap S_{AC} = \{H\}$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} -2 + s &= 1 + t \\ -5 + s &= 4 - 2t \end{aligned}\right\} -$$

$$3 = -3 + 3t \qquad | +3$$

$$6 = 3t \qquad |:3$$

$$\underline{\underline{t = 2}}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{U(3|0)}}$$

Berechnung des Umkreisradius:

$$\overrightarrow{UA} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad r = \left|\overrightarrow{UA}\right| = \sqrt{10^2} \qquad \underline{\underline{r = 10}}$$

$$k: (x-3)^2 + y^2 = 100$$

Geraden AB, BC und AC in Normalform:

$$g_{AB}: \quad x + y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad g_{BC}: \quad 3x - y = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$g_{AB}: \quad \underline{x + y = -7} \qquad g_{BC}: \quad \underline{3x - y = 19}$$

$$g_{AC}: \quad x - 2y = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g_{AC}: \quad \underline{x - 2y = -7}$$

Abstände des Höhenschnittpunktes von den Seiten:
(HNF von g_{AB}, g_{BC} und g_{AC})

$$g_{AB}: \frac{x+y+7}{\sqrt{1^2+1^2}}=0 \qquad g_{BC}: \frac{3x-y-19}{\sqrt{3^2+1^2}}=0 \qquad g_{AC}: \frac{x-2y+7}{\sqrt{1^2+2^2}}=0$$

$$\left|\frac{-1-2+7}{\sqrt{1^2+1^2}}\right|=d_{AB} \qquad \left|\frac{-3+2-19}{\sqrt{3^2+1^2}}\right|=d_{BC} \qquad \left|\frac{-1+4+7}{\sqrt{1^2+2^2}}\right|=d_{AC}$$

$$d_{AB}=\frac{4}{\sqrt{2}} \qquad d_{BC}=\frac{20}{\sqrt{10}} \qquad d_{AC}=\frac{10}{\sqrt{5}}$$

Berechnung der Einheitsvektoren:

$$\overline{AB}_{n0}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \qquad \overline{BC}_{n0}=\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} \qquad \overline{AC}_{n0}=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

Berechnung, H wird an den Seiten gespiegelt:

H+2mal die Lange des Abstandes zur Seite $H_{xy}=(H)+2\cdot Länge\cdot Einheitsvektor$

$$H_3=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}-2\cdot\frac{4}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$
$$H_3=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$$
$$H_3(-5|-6)$$

$$H_1=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}+2\cdot\frac{20}{\sqrt{10}}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$$
$$H_1=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}12\\-4\end{pmatrix}$$
$$H_1(11|-6)$$

$$H_2=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}+2\cdot\frac{10}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$
$$H_2=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\-8\end{pmatrix}$$
$$H_2(3|-10)$$

$$H_1=H+2\cdot d_{BC}\cdot\overrightarrow{BC}_{no}$$
$$H_2=H+2\cdot d_{AC}\cdot\overrightarrow{AC}_{no}$$
$$H_3=H+2\cdot d_{AB}\cdot\overrightarrow{AB}_{no}$$

Überprüfen, ob die Punkte H_1, H_2, H_3 liegen auf dem Umkreis:

$$(x-3)^2+y^2=100$$

$$H_3(-5|-6) \qquad H_1(11|-6) \qquad H_2(3|-10)$$
$$(-5-3)^2+(-6)^2=100 \qquad (11-3)^2+(-6)^2=100 \qquad (3-3)^2+(-10)^2=100$$
$$64+36=100 \quad q.e.d \qquad 64+36=100 \quad q.e.d \qquad 100=100 \quad q.e.d$$

Alle drei gespiegelten Punkte liegen auf dem Umkreis!