Beispiel)

Gegeben ist die Funktion $f(x)=4\cdot e^{-x}-e^{-2x}$ in R.

a.) Berechne die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Extrem- und Wendepunkte sowie die Asymptoten. Zeichne den Graphen im Intervall [-1,5; 3].

b.) Die Gerade g: x=z für z>0 schließt mit dem Graphen der Funktion und der x-Achse eine Fläche A_z ein. Berechne A_z zuerst allgemein und dann für $z\to\infty$!

<u>Ableiten der Funktion:</u>

$$f(x)=4\cdot e^{-x}-e^{-2x}$$
$$f'(x)=4\cdot e^{-x}\cdot(-1)-e^{-2x}\cdot(-2)$$
$$f'(x)=-4\cdot e^{-x}+2\cdot e^{-2x}$$
$$f''(x)=-4\cdot e^{-x}\cdot(-1)+2\cdot e^{-2x}\cdot(-2)$$
$$f''(x)=4\cdot e^{-x}-4\cdot e^{-2x}$$

a) <u>Schnittpunkte mit der y-Achse:</u>

$$f(0)=4\cdot e^{-0}-e^{-2\cdot 0}=3 \qquad \underline{\underline{S(0|3)}}$$

(1) <u>Nullstellen berechnen:</u> $f(x)=0$:

$$4\cdot e^{-x}-e^{-2x}=0 \qquad e^{-x}=u$$
$$4u-u^2=0 \qquad e^{-x}=0 \text{(keine Lösung)}$$
$$u\cdot(4-u)=0 \qquad e^{-x}=4\,|\ln$$
$$u_1=0 \qquad -x\cdot\ln e=\ln 4$$
$$u_2=4 \qquad x=-\ln 4$$
$$\underline{\underline{N(-1,39|0)}}$$

(2) <u>Extremstellen berechnen:</u>

$$f'(x)=0: \qquad -4\cdot e^{-x}+2\cdot e^{-2x}=0 \qquad e^{-x}=u$$
$$-4u+2u^2=0 \qquad e^{-x}=0 \quad \text{(keine Lösung)}$$
$$u\cdot(-4+2u)=0 \qquad e^{-x}=2 \quad |\ln$$
$$u_1=0 \qquad -x\cdot\underbrace{\ln e}_{1}=\ln 2$$
$$-4+2u=0 \quad |:2 \qquad \underline{\underline{x=-\ln 2}}$$
$$-2+u=0 \quad |+2$$
$$u_2=2$$

y-Wert berechnen und überprüfen ob Hoch- oder Tiefpunkt vorliegt

$$f(-\ln 2) = 4 \cdot e^{\ln 2} - e^{2\cdot\ln 2} = 4\cdot 2 - 4 = 4$$

$$f''(-\ln 2) = 4 \cdot e^{\ln 2} - 4\cdot e^{2\cdot\ln 2} = 4\cdot 2 - 4\cdot 4 = 8 - 16 = -8 < 0 \rightarrow \quad \underline{\underline{H(-0,69\,|\,4)}}$$

(3) Wendepunkt berechnen:

$$f''(x) = 0: \quad 4\cdot e^{-x} - 4\cdot e^{-2x} = 0 \qquad e^{-x} = u$$

$$4u - 4u^2 = 0 \qquad e^{-x} = 0 \text{ (keine Lösung)}$$

$$4u\cdot(1-u) = 0 \qquad e^{-x} = 1 \,|\ln$$

$$u_1 = 0 \qquad -x\cdot\underbrace{\ln e}_{1} = \ln 1$$

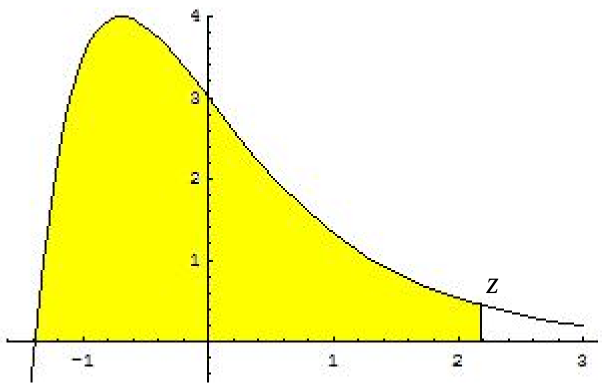
$$u_2 = 1 \qquad \underline{\underline{x = 0}} \quad y = 3 \quad \underline{\underline{W(0\,|\,3)}}$$

Asymptoten berechnen:

$$\lim_{x\to\infty}\left(4\cdot e^{-x} - 2\cdot e^{-2x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4}{\underbrace{e^x}_{0}} - \frac{2}{\underbrace{e^{2x}}_{0}}\right) = 0$$

$\underline{\underline{y = 0}}$ also die x-Achse

Skizze der Funktion im Intervall [-1,5; 3]:



b) Berechnung von A_z:

$$A_z = \int_{-\ln 4}^{z} (4\cdot e^{-x} - e^{-2x})dx = -4\cdot e^{-x} - e^{-2x}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\Bigg|_{-\ln 4}^{z} = -4\cdot e^{-z} + 0,5\cdot e^{-2z} - (-4\cdot e^{\ln 4} + 0,5\cdot e^{2\ln 4}) =$$

$$= -4\cdot e^{-z} + 0,5\cdot e^{-2z} - (-16 + 8) = \underline{\underline{-4\cdot e^{-z} + 0,5\cdot e^{-2z} + 8}}$$

$$\lim_{z\to\infty}\left(8 - \frac{4}{\underbrace{e^z}_{\to 0}} + \frac{1}{\underbrace{2\cdot e^{2z}}_{\to 0}}\right) = 8 \qquad \underline{\underline{A_\infty = 8}}$$