Beispiel)

Die Ebene ε enthält die Punkte A, B und C. Außerdem sind eine Gerade g gegeben, welche die Ebene durchstößt, sowie ein Punkt D, der nicht in der Ebene liegt.

$$A(6|-2|0), B(-3|-6|1), C(3|2|3), S(0|5|2), g:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\4\\5\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

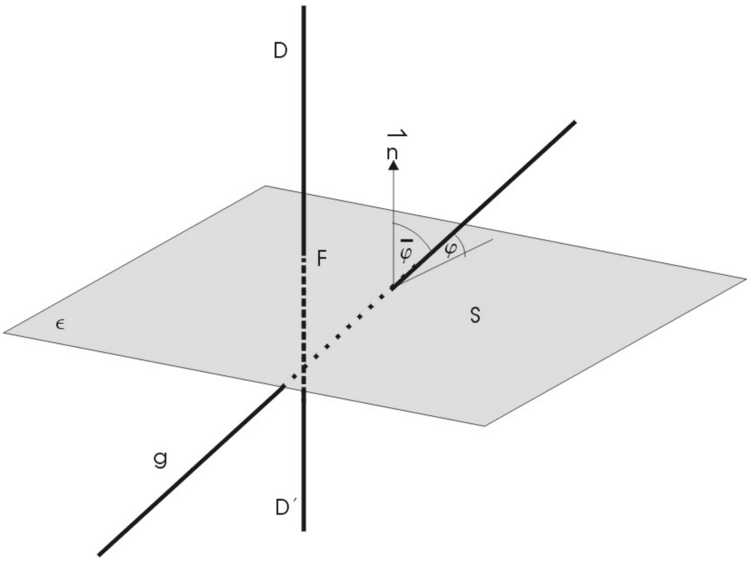
a.) Bestimme die Gleichung der Ebene ε und den Abstand des Punktes D von der Ebene. Wie lauten die Koordinaten des Punktes D´, wenn der Punkt D an der Ebene gespiegelt wird.

b.) Berechne den Durchstoßpunkt D der Geraden g mit der Ebene ε und den Schnittwinkel.

c.) Wie groß ist das Volumen des von den Punkten A, B, C und S erzeugten Tetraeders?

<u>ad) a</u>

<u>Skizze</u>



Berechnen der Richtungsvektoren:

$$\overline{AB}=\begin{pmatrix}-3\\-6\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6\\-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9\\-4\\1\end{pmatrix}$$

$$\overline{AC}=\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6\\-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\4\\3\end{pmatrix}$$

Berechnen des Normalvektors mit Hilfe des Kreuzproduktes!

$$\vec{n}=\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{pmatrix}-9\\-4\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-3\\4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16\\24\\-48\end{pmatrix}\overset{8}{=}\begin{pmatrix}-2\\3\\-6\end{pmatrix}$$

<u>Abstand des Punktes D von der Ebene:</u>

$$\varepsilon_{ABC}:\ 2x-3y+6z-18=0 \qquad \left|\vec{n}\right|=\sqrt{4+9+36}=\sqrt{49=7}$$

$$\frac{2x-3y+6z-18}{7}=0 \qquad D(0/5/2)$$

$$d=\left|\frac{2\cdot0-3\cdot5+6\cdot2-18}{7}\right|=\frac{|-21|}{7}=\underline{\underline{3E}}$$

Aufstellen der Ebene ε und Geraden:

$$-2x+3y-6z=\begin{pmatrix}-2\\3\\-6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\-2\\0\end{pmatrix}$$

$$-2x+3y-6z=-12-6$$

$$\varepsilon_{ABC}:\underline{\underline{-2x+3y-6z=-18}}$$

Gerade g_1 durch den Punkt D:

$$\underline{g_1=X=\begin{pmatrix}0\\5\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\\-6\end{pmatrix}}$$

Gerade g_1 mit der Ebene ε schneiden:

$$g_1\cap\varepsilon=\{F\}\qquad x=0-2s,\ y=5+3s,\ z=2-6s$$

$$-2x+3y-6z=-18$$

$$-2\cdot(-2s)+3\cdot(5+3s)-6\cdot(2-6s)=-18$$

$$4s+15+9s-12+36s=-18\quad|-3$$

$$49s=-21\qquad|:49$$

$$\underline{\underline{s=-\frac{21}{49}=-\frac{3}{7}}}$$

$$F=\begin{pmatrix}0\\5\\2\end{pmatrix}-\frac{3}{7}\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\5\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-6/7\\9/7\\-18/7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6/7\\26/7\\32/7\end{pmatrix}$$

$$\underline{F\left(6/7\,|\,26/7\,|\,32/7\right)}$$

Berechnung des Abstandes D von der Ebene ε:

$$\overrightarrow{DF}=\begin{pmatrix}6/7\\26/7\\32/7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\5\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6/7\\-9/7\\18/7\end{pmatrix}$$

$$d=\left|\overrightarrow{DF}\right|=\sqrt{\frac{6^2+9^2+18^2}{7^2}}=\sqrt{\frac{441}{49}}=3$$

$$\underline{\underline{d=3E}}$$

Berechnung des Punktes D´:

$$D'=F+\overrightarrow{DF}=\begin{pmatrix}6/7\\26/7\\32/7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6/7\\-9/7\\18/7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12/7\\17/7\\50/7\end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{D'\left(12/7\,|\,17/7\,|\,50/7\right)}}$$

Ad b)

Berechnung des Schnittpunktes S:

$$\varepsilon\cap g=\{S\}\qquad\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\4\\5\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\qquad\begin{matrix}x=0-t\\y=4+0t\\z=5+t\end{matrix}$$

$$-2x+3y-6z=-18$$

$$-2\cdot(-t)+3\cdot(4)-6\cdot(5+t)=-18$$

$$2t+12-30-6t=-18$$

$$-4t-18=-18\quad|+18$$

$$-4t=0\qquad|:(-4)$$

$$\underline{\underline{t=0}}$$

$$S=\begin{pmatrix}0\\4\\5\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{S(0\,|\,4\,|\,5)}}$$

Berechnung des Schnittwinkels:

Ad c) Berechnung des Volumens:

$$\cos\overline{\varphi} = \frac{\begin{pmatrix}2\\-3\\6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{49}\cdot\sqrt{2}}$$

$$\cos\overline{\varphi} = \frac{-2+6}{7\cdot\sqrt{2}}$$

$$\underline{\underline{\overline{\varphi} = 66{,}17°}} \qquad \underline{\underline{\varphi = 90-\overline{\varphi} = 23{,}83°}}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-9\\-4\\1\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-6\\0\\3\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}0\\5\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}6\\-2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\7\\2\end{pmatrix}$$

$$V = \frac{1}{6}\cdot\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6}\cdot\left|\left(\vec{n}\right)\cdot\overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6}\cdot\left|\begin{pmatrix}-16\\24\\-48\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-6\\7\\2\end{pmatrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\left|96+168-96\right| = \frac{168}{6} = \underline{\underline{28\,E^3}}$$