Beispiel)

Für eine Firma konnte aufgrund von Beobachtungen folgende Tabelle ermittelt werde.

X	12	16	20	x...Produktionsmenge
K'(x)	192,58	359,62	578,5	K'(x)...Grenzkosten

Die zugehörige Nachfragefunktion lautet: $p(x) = -0,06x^2 - 0,3x + 250$

a.) Ermittle die Kostenfunktion 3. Grades, wenn die Gesamtkosten für x=25ME 7.395.- betragen?
b.) Berechne mit Hilfe des Newtonschen Näherungsverfahrens das Betriebsoptimum auf zwei Stellen genau. Wie groß ist das Stückkostenminimum.
c.) Für welchen Verkaufspreis wird ein maximaler Gewinn erzielt und wie groß ist dieser Gewinn? Wie groß ist die verkaufte Menge in diesem Fall?
d.) Für welchen Verkaufspreis wird der Betrieb zum Grenzbetrieb?

ad a)

$$K'(x) = ax^2 + bx + c$$

$$K'(12) = 192,58: \quad I: 144a + 12b + c = 192,58$$
$$K'(16) = 359,62: \quad II: 256a + 16b + c = 59,62$$
$$K'(20) = 578,5: \quad \underline{III: 400a + 20b + c = 578,5}$$

IV: (II-I) $112a + 4b = 167,04$
V: (III-II) $\underline{144a + 4b = 218,88}$

(V-IV) $32a = 51,84 \,|: 32$

$\underline{\underline{a = 1,62}}$

$4b = 167,04 - 112 \cdot 1,62$

$b = \dfrac{167,04 - 112 \cdot 1,62}{4} = -3,6$

$c = 587,5 - 400 \cdot 1,62 - 20 \cdot (-3,6)$

$\underline{\underline{c = 2,5}}$

<u>Die Funktion lautet:</u> $\underline{\underline{K'(x) = 1,62x^2 - 3,6x + 2,5}}$

Berechnung der Kostenfunktion K(x) durch Integration von K'(x):

$$K(x)=\int K'(x)dx=\int(1,62x^2-3,6x+2,5)dx=$$
$$=\frac{1,62x^3}{3}-\frac{3,6x^2}{2}+2,5x+c=0,54x^3-1,8x^2+2,5x+c$$
$$\underline{\underline{K(x)=0,54x^3-1,8x^2+2,5x+c}}$$

Ermittlung der Konstanten C, um die Kostenfunktion zu erhalten:

$$K(25)=7395$$
$$7395=0,54\cdot 25^3-1,8\cdot 25^2+2,5\cdot 25+c$$
$$\underline{\underline{c=20}}$$
$$\underline{\underline{K(x)=0,54x^3-1,8x^2+2,5x+20}}$$

ad b)

Ermitteln des Betriebsoptimums: $\overline{K}'(x)=0$:

$$\overline{K}(x)=0,54x^2-1,8x+2,5+\frac{20}{x}$$
$$\overline{K}'(x)=1,08x-1,8-\frac{20}{x^2}$$

Newtonsches Näherungsverfahren:
$$f(x)=1,08x^3-1,8x^2-20$$
$$f'(x)=3,24x^2-3,6x$$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$\frac{f(x)}{f'(x)}$	$x-\frac{f(x)}{f'(x)}$
4	20,32	37,44	0,54	3,46
3,46	3,19	26,33	0,12	3,34
3,34	0,16	24,12	0,01	3,33
3,33	-0,08	23,94	-0,003	3,333

Polynomdivision der Funktion:

$$(x^3 - 1,667x^2 - 18,52) \quad : (x - 3,33) \quad = x^2 + 1,667x + 5,558$$
$$\underline{\pm x^3 \mp 3,334x^2}$$
$$1,67x^2 - 18,25$$
$$\underline{\pm 1,67x^2 \mp 5,558x}$$
$$5,558x - 18,52$$
$$\underline{\pm 5,558x \mp 18,53}$$
$$\approx 0R$$

$$x^2 + 1,667x + 5,558 = 0$$
$${}_1x_2 = -0,8335 \pm \sqrt{08335^2 - 5,558}$$
$${}_1x_2 = keine - Lösung(komplex!!)$$

$$\underline{x = 3,33ME}$$
$$\underline{\underline{K(3,33) = 8,5}}$$

Das Stückkostenminimum ist 8,5.

ad c)

Ermitteln von G_{max}: G'(x)=0:

G(x)= E(x)- K(x)

Aufstellen der Erlösfunktion E(x):

$$E(x) = x \cdot p(x)$$
$$\underline{\underline{E(x) = -0,06x^3 - 0,3x^2 + 250x}}$$

Aufstellen der Gewinnfunktion G(x):

$$G(x) = E(x) - K(x)$$
$$G(x) = -0,06x^3 - 0,3x^2 + 250x - (0,54x^3 - 1,8x^2 + 2,5x + 20) =$$
$$= -0,06x^3 - 0,3x^2 + 250x - 0,54x^3 + 1,8x^2 - 2,5x - 20$$
$$\underline{\underline{G(x) = -0,6x^3 + 1,5x^2 + 247,5x - 20}}$$
$$G'(x) = -1,8x^2 + 3x + 247,5$$

G'(x)=0:

$$x^2 - 1,67x - 137,5 = 0$$
$${}_1x_2 = 0,835 \pm \sqrt{0,835^2 + 137,5}$$
$${}_1x_2 = 0,835 \pm 11,76$$
$$\underline{\underline{x_1 = 12,59}}$$
$$\underline{(x_2 = -10,925)}$$

$$p(12,59) = -0,06 \cdot 12,59^2 - 0,3 \cdot 12,59 + 250$$
$$\underline{\underline{p(12,59) = 236,71}}$$

12,59ME werden verkauft der Verkaufspreis ist 236,71 und G_{max} beträgt 2136,4

ad d)

Für $\underline{p_0 = \overline{K}(3,33) = 8,5}$ wird der Betrieb zum Grenzbetrieb.